OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020

Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Aflați câte numere de forma $\overline{a5b}$ se pot scrie, știind că a și b sunt cifre distincte, care verifică egalitatea:
$[3+(a\cdot b+31\cdot 8-603:3):7]\cdot 2+1996=2020$

Soluție:

$[3+(a\cdot b+248-201):7]\cdot 2=24$ ……………………………..……… 1p
$3+(a\cdot b+47):7=12$ ……………...…………………………..……… 1p
$(a\cdot b+47):7=9$ ……………………………………………..……… 1p
$a\cdot b+47=63$ …………………..…………………………..……… 1p
$a\cdot b=16$ ………………………..………………………..……… 1p
Convin următoarele situații:
a=2, b=8 => $\overline{a5b}$=258 ……………..…………………………..……….. 1p
a=8, b=2 => $\overline{a5b}$=852 ……………..…………………………..……….. 1p

SUBIECTUL II

Se consideră numărul $N=7\cdot 4^{10}+7\cdot 4^{9}+7\cdot 4^{8}+\ldots+7\cdot 4^{1}+7$

a) Demonstrați că N este număr impar;
b) Determinați ultima cifră a numărului N;
c) Arătați că $N+5^{2019}$ este divizibil cu 2 .

Soluție:

a) $N=7\cdot(4^{10}+4^{9}+4^{8}+\ldots+4^{1})+7$ ………..…………………………..… 1p

$(4^{10}+4^{9}+4^{8}+\ldots+4^{1})$ este număr par fiind o sumă de numere pare iar 7 este număr impar.
Deci, N= număr impar …..…………..………………………...……… ..1p

b) $U(N)=U[7\cdot(4^{10}+4^{9}+4^{8}+\ldots+4^{1})+7]$
$U(4^{2n})=6$, n∈N* iar $U(4^{2n+1})=4$, n∈N ………..……………………… 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Suma $(4^{10}+4^9+4^8+\ldots+4^1)$ având cinci termeni cu exponent număr par și cinci termeni cu exponent număr impar, deducem:

$U\,(4^{10}+4^9+4^8+\ldots+4^1)=0$ 1p

$U\,[7\cdot(4^{10}+4^9+4^8+\ldots+4^1)+7]= U\,(7\cdot 0+7)= U\,(7)$

Deci $U\,(N)=7$ 1p

c) $U\,(N+5^{2019})= U\,(7+5)= U\,(12)=2$ 1p

$N+5^{2019} \vdots 2$ 1p

SUBIECTUL III

a) Calculați 42^2+16^2;
b) Scrieți numărul 2020^5 ca o sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

a) $42^2+16^2=2020$ 2p
b) $2020^5=2020^4\cdot 2020=$ 1p
$=(2020^2)^2\cdot 2020=$ 1p
$=(2020^2)^2\cdot(42^2+16^2)=$..1p
$=(2020^2)^2\cdot 42^2+(2020^2)^2\cdot 16^2=$ 1p
$=(2020^2\cdot 42)^2+(2020^2\cdot 16)^2$ 1p

SUBIECTUL IV

Să se afle trei numere naturale, știind că diferența dintre primul și al treilea este 76, împărțindu-l pe al doilea la al treilea obținem câtul 3 și restul 5, iar împărțindu-l pe primul la diferența dintre al doilea și al treilea obținem câtul 2 și restul 6.

Soluție:

Fie a, b, c – numerele căutate

$a-c=76$ 1p

$b=3\cdot c+5$ 1p

$a=2(b-c)+6$ 1p

$a=4c+16$

$4c+16=c+76$ 1p

$3c=60 \Rightarrow c=20$ 1p

$a=4\cdot 20+16 \Rightarrow a=96$ 1p
$b=3\cdot 20+5 \Rightarrow b=65$ 1p

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*