

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

1. Arătați că

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2020}} < \frac{5}{4}$$

SOLUȚIE:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2020}} = S$$

$$S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{2021}} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{2021}} \dots\dots\dots 2p$$

$$S = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{2021}} \right) < \frac{5}{4} \text{ justificare} \dots\dots\dots 3p$$

2. Câte numere de forma \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, care nu sunt raționale, există între numerele

$$a = \sqrt{4 \cdot \underbrace{100\dots01}_{9 \text{ zerouri}}^2} \text{ și } b = \sqrt{\underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}} \cdot \underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}}}$$

SOLUȚIE:

$$4 \cdot \underbrace{100\dots01}_{9 \text{ zerouri}}^2 = \left(\underbrace{2 \cdot 100\dots01}_{9 \text{ zerouri}} \right)^2 = \left(\underbrace{200\dots02}_{9 \text{ zerouri}} \right)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}} \cdot \underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}} = \left(\underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}} \right)^2 \dots\dots\dots 1p$$

Numerele $\underbrace{200\dots02}_{9 \text{ zerouri}}$ și $\underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}}$ sunt consecutive.....1p

Între n^2 și $(n+1)^2$ se află $2n$ numere naturale care nu sunt pătrate perfecte.....2p

Între $\left(\underbrace{200\dots02}_{9 \text{ zerouri}} \right)^2$ și $\left(\underbrace{200\dots03}_{9 \text{ zerouri}} \right)^2$ sunt $\underbrace{400\dots04}_{9 \text{ zerouri}}$ numere naturale care nu sunt pătrate perfecte. 1p

Deci, sunt $\underbrace{400\dots04}_{9 \text{ zerouri}}$ numere de forma \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$ care nu sunt raționale.....1p

3. Fie ABCD paralelogram cu aria $64\sqrt{5}cm^2$. Dacă E este mijlocul lui AB. Să se afle aria triunghiului DEB.

SOLUȚIE:

$$\triangle ADB \equiv \triangle DBC \Rightarrow A_{\triangle ADB} = 32\sqrt{5} \dots\dots\dots 2p$$

$$[DE] \text{ mediană} \Rightarrow A_{\triangle ADE} = A_{\triangle BDE} \dots\dots\dots 3p$$

$$A_{\triangle BDE} = 16\sqrt{5}cm^2 \dots\dots\dots 2p$$

4. Fie $C(O, r)$ și A un punct exterior cercului astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN ($M, N \in C(O, r)$) are măsura de 30° .

Dacă P este mijlocul segmentului AO, arătați că $\triangle MNP$ este echilateral.

SOLUȚIE:

$$[AM] \equiv [AN], OM \perp AM, ON \perp AN \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle AMO \equiv \triangle ANO \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle AON \dots\dots\dots 1p$$



$$\sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO$$

$$\Delta AMP \equiv \Delta ANP \Rightarrow [MP] \equiv [NP] \dots\dots\dots 1p$$

$$MP = \frac{AO}{2} = OP \Rightarrow \Delta POM \text{ isoscel} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle OMP) = 75^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle PMI) = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \Delta MNP \text{ echilateral} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.