OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1) Determinați numerele reale *a*, *b*, *c* dacă $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca \geq \frac{1}{3}$

Soluție:

$ab+bc+ca-\frac{a+b+c}{3} \geq 0$ ……………………………………………………1p

$a\left(b-\frac{1}{3}\right)+b\left(c-\frac{1}{3}\right)+c\left(a-\frac{1}{3}\right) \geq 0$ ……………………………………………1p

$a\left(\frac{3b-a-b-c}{3}\right)+b\left(\frac{3c-a-b-c}{3}\right)+c\left(\frac{3a-a-b-c}{3}\right) \geq 0$ ……………………………1p

$-a^2-b^2-c^2+ab+ac+bc \geq 0$ ……………………………………………………1p

$\Leftrightarrow\ 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \leq 0$ …………………………………………1p

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leq 0$ ……………………………………………………1p

$\Rightarrow\ a=b=c=\frac{1}{3}$ ……………………………………………………………1p

2) Arătați că:

a) numărul *A* este rațional, unde $A=\sqrt{\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right):\frac{2}{7}}$;

b) numărul *B* este irațional, unde $B=\sqrt{\left[\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4}+\frac{6}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}\right]:\frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}{2}}$.

Soluție:

a) $A=\sqrt{\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}+\frac{7-4\sqrt{3}}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)}\right)\cdot\frac{7}{2}}$ ………………………………1p

$A=\sqrt{\left(\frac{7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{49-48}\right)\cdot\frac{7}{2}}$ ……………………………………………………1p

obținem $A=\sqrt{\frac{14\cdot 7}{2}}=7\in\mathbb{Q}$ ……………………………………………………1p

b) $B=\sqrt{\left[\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4}+\frac{6\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{\left(49-48\right)^n}\right]\cdot\frac{2}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}}$ …………………………………………..1p

$B=\sqrt{\left[\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4}+\frac{4\cdot 6\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4}\right]\cdot\frac{2\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{\left(49-48\right)^n}}$ ……………………………………….1p

$B=\sqrt{\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^n\cdot 25\cdot 2\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4}}$ ……………………………………………………….1p

obținem $B=\left(7+4\sqrt{3}\right)^n\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ …………………………………………………...1p

3) Fie triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\sphericalangle A)=90^0$, *AB* = 30 cm, *AC* = 40 cm. În punctul *A* se ridică perpendiculara *AM* pe planul (*ABC*), *AM* = 24 cm.

a) Determinați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (*MBC*) și (*ABC*).

b) Arătați că piciorul perpendicularei din *A* pe planul (*MBC*) este ortocentrul triunghiului *MBC*.

Soluţie:

a) fie $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, justificare $MD\perp BC$ (aplică corect T celor 3 $\perp$) ……………1p

justificare unghiul căutat este $\sphericalangle MDA$ ……………………………………………………1p

calcul $AD=24\,\text{cm}$ ……………………………………………………………………………...1p

$\Rightarrow m(\sphericalangle MDA)=45^0$ ……………………………………………………………………………1p

b) fie $H\in(MD)$, astfel încât $AH\perp MD \Rightarrow AH\perp(MBC)$ ………………………………1p

$AC\perp(MBA)$ …………………………………………………………………………………1p

$\Rightarrow CH\perp MD$, deci *H* ortocentrul triunghiului *MBC* ………………………………………1p

4) Se consideră tetraedrul regulat *ABCD* și $DO\perp(ABC)$. Dacă $M\in(DO)$ astfel încât $MA\perp MB$, arătați că *M* este mijlocul lui (*OD*).

Soluţie:

a) desen ………………………………………………………………………………………1p

$\Delta\,MOA$ și $\Delta\,MOB$ dreptunghice în *O* – justificare ………………………………………..1p

fie *a* muchia tetraedrului și *x* lungimea lui [*MO*] $\Rightarrow AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ …………………1p

$MA^2 = x^2 + \frac{a^2}{3}$, $MB^2 = x^2 + \frac{a^2}{3}$ 1p

ΔMAB dreptunghic în M $\Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{6} = MO$ 1p

$DO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ 1p

$2 \cdot MO = \frac{a\sqrt{6}}{3} = DO$ $\Rightarrow$ M este mijlocul lui (OD) 1p

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro