OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17 februarie 2018

Clasa a VI-a
Barem de corectare și notare

1) Să se rezolve ecuaţia:

$$2019\cdot\left(\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+...+\frac{x}{1+2+3+...+2018}\right)=2+4+6+...+4034$$

Soluţie:

$1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……………………………………………..……..……….……….…..…1p

$\Rightarrow 1+2=\dfrac{2\cdot3}{2},\ 1+2+3=\dfrac{3\cdot4}{2},\dots,\ 1+2+...+2018=\dfrac{2018\cdot2019}{2}$ ……………………...….1p

membrul stâng devine $2019\cdot x\left(\dfrac{2}{2\cdot3}+\dfrac{2}{3\cdot4}+...+\dfrac{2}{2018\cdot2019}\right)$ ………….….…..……………1p

$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ………………………………..…………………………..……………...1p

membrul stâng devine $2019\cdot x\cdot2\left(\dfrac{2017}{2\cdot2019}\right)=2017x$ ………………………………..…………1p

$2+4+6+...+4034=2(1+2+3+...+2017)=2017\cdot2018$ ………………………………....…1p

$\Rightarrow\ x=2018$ …….……………………………...……………………………………..……………….1p

2) Jumătatea produsului a două numere naturale nenule este cu 1011 mai mică decât suma celor două numere. Câţi divizori are cubul produsului celor două numere?

Soluţie:

$\dfrac{xy}{2}=x+y-1011$ ……………………………………………………………….……….….…..1p

$2x-4-(xy-2y)=2018$ …………………………………………………………………..1p

$(x-2)(2-y)=2018$ …………………….………………………………………………………1p

obţinem $x=2020$ şi $y=1$……………………………..…………………………..………….....1p

$\Rightarrow xy=2020\ \ (xy)^3=2020^3$ …………………………………………………….…………………1p

$2020^3=\left(2^2\cdot5\cdot101\right)^3=2^6\cdot5^3\cdot101^3$ …………………………………………………………1p

deci $(xy)^3$ are $(6+1)(3+1)(3+1)=112$ divizori ………………………………………..………1p

3) Pe o dreaptă *d* se consideră un punct *A* şi de aceeaşi parte a lui *A* se iau punctele M_1, M_2, M_3, ..., M_n şi *B* astfel încât $AM_1 = M_1M_2 = a$, a număr raţional, $AM_2 = M_2M_3$, $AM_3 = M_3M_4$, … , $AM_n = M_nB$.

a) Arătaţi că $4M_7M_8 = M_9M_{10}$

b) Determinaţi *n* astfel încât $M_nB = 1024a$

Soluţie:

a) $AM_2 = M_2M_3 = 2a$, $AM_3 = M_3M_4 = 4a$, $AM_4 = M_4M_5 = 8a$ ……………………….1p

$AM_{n-1} = M_{n-1}M_n = 2^{n-2}a$ ………………………………………………………………1p

$\Rightarrow M_7M_8 = 2^6a$ şi $M_9M_{10} = 2^8a$ ……………………..…………………..…………...1p

$\Rightarrow 2^2 \cdot 2^6 a = 2^8 a$ adevărat ……………………………………………….……….…………1p

b) $AM_n = M_nB = 2^{n-1}a$ ………………………………………………………….……………1p

$\Rightarrow 2^{n-1}a = 2^{10}a$ ……………………………… …….………..……………….……..………1p

$\Rightarrow n = 11$ ……………………………………… …….…………….…………………..…...…1p

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*