OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17 februarie 2018

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1. Să se determine numerele reale $\mathbf{x,y,z}$, care verifică inegalitatea

$$\frac{\mathbf{x+y+z}}{\mathbf{2}}+\mathbf{7}\le \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{y-1}}+\sqrt{\mathbf{z+1}}\ .$$

Soluţie: - se impun condiţiile de existenţă : $x\ge 0,\ y-1\ge 0$ şi $z+1\ge 0$ (1)............................**1p**

- notăm $\sqrt{x}=a,\ \sqrt{y-1}=b$ şi $\sqrt{z+1}=c$, cu $a,b,c\ge 0$, din care deducem că $x=a^2,\ y=b^2+1$ şi $z=c^2-1$..**1p**
- după calcule din inegalitate se obţine : $a^2+b^2+c^2-4a-6b-2c+14\le 0$ adică : $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-1)^2\le 0$ (2)..**2p**
- se deduce că relaţia (2) este posibilă numai dacă $(a-2)^2=0;\ (b-3)^2=0;\ (c-1)^2=0$, adică $a=2, b=3$ şi c=1...**2p**
- se revine la substituţii obţinând pentru necunoscutele iniţiale valorile : $x=4,\ y=10$ şi $z=0$, care verifică condiţiile (1)...**1p**

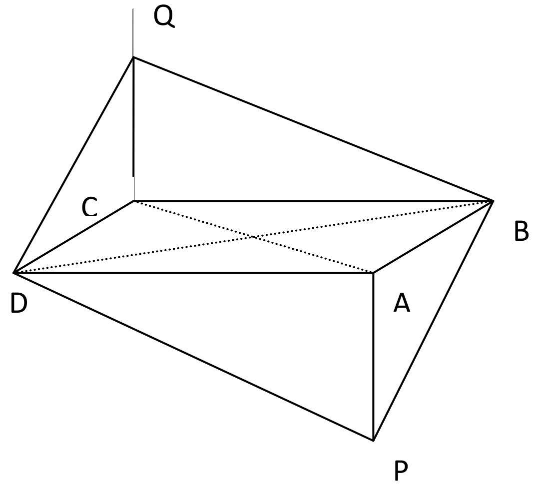
2. In rombul ABCD $\mathbf{m(\sphericalangle BAD)=120^\circ}$, iar AC=6cm. De o parte şi de cealaltă parte a planului ABC se iau punctele P şi Q, $\mathbf{PA\perp(ABC)}$ şi $\mathbf{CQ\perp(ABC)}$, PA = CQ şi DQ= $\mathbf{6\sqrt{2}}$ cm.

a) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele CQ şi PB;

b) Demonstraţi că patrulaterul PBQD este romb.

Soluţie:

a)



$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ romb} \\ m(\sphericalangle BAD)=120^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle BAC)=60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ si } \Delta DCA \text{ sunt echilaterale, dar } AC=6cm \Rightarrow$

$\Rightarrow AC=BC=CD=DA=6\text{ cm}$

....**1p**

$\left.\begin{array}{l}PA\perp(ABC) \\ CQ\perp(ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow PA \parallel CQ \Rightarrow m(\sphericalangle(PB,CQ))=m(\sphericalangle(PB,PA))=m(\sphericalangle BPA)$ **1p**

$CQ\perp(ABC)\Rightarrow CQ\perp CD\Rightarrow \Delta DCQ$ dreptunghic $\Rightarrow$ apl.Pitagora: $CQ=6cm$ **1p**

$\left.\begin{array}{l}\text{Dar } PA=CQ=6\text{ cm} \\ PA\perp(ABC)\Rightarrow PA\perp AB \\ AB=6cm\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PAB$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle BPA)=45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle(PB,CQ))=45^\circ$ ...**1p**

b)

$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}PA\parallel CQ \\ PA=CQ\end{array}\right\} \Rightarrow PAQC \text{ paralelogram} \Rightarrow [QP] \text{ si } [CA] \text{ au acelasi mijloc} \\ ABCD \text{ romb} \Rightarrow [BD] \text{ si } [AC] \text{ au acelasi mijloc}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [QP]$ si $[BD]$ se injumatatesc $\Rightarrow PBQD$ este paralelogram (1)

....**1p**

Dem. că $\Delta PAB \equiv \Delta PAD$ (cazul CC) $\Rightarrow PB=PD$ (2)..**1p**

Din (1) si (2) deducem ca PBQD este romb...**1p**

3. Se consideră suma $S=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1008^2}{2015\cdot 2017}$

a) Arătaţi că pentru orice $k\in N^*$ are loc egalitatea: $\frac{k^2}{4k^2-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$**;**

b) Calculaţi suma S;

c) Determinaţi partea întreagă a numărului real S .

Solutie:

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=$ .... **(1p)**

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(4k^2-1)}=\frac{4k^2-1+1}{4(4k^2-1)}=\frac{k^2}{4k^2-1}$ .... **(1p)**

b) În relaţia de la punctul a) atribuindu-i lui k valori de la 1 la 1008, obţinem:

pt k=1 : $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$

pt k=2: $\frac{2^2}{3\cdot 5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

pt. K=3: $\frac{3^2}{5\cdot 7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

....

pt.k=1008 $\frac{1008^2}{2015\cdot 2017}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}\right)$ (*) .... (2p)

Însumând relaţiile (*) se obţine:

$S=1008\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}\right)=1008\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2017}\right)$..................... (1p)

Finalizare şi aducerea sumei S la o formã cât mai simplă .... (1p)

c) Din suma S obţinută sub forma $S=252+\frac{252}{2017}$ se deduce că $[S]=252$.......... (1p)

Notă:

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro